V Irańska Olimpiada Geometryczna

Poziom podstawowy

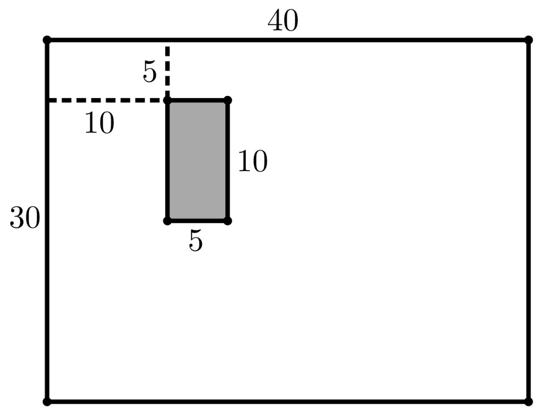
Czwartek, 6 września, 2018r.

Zabronione jest rozpowszechnianie poniższych zadań do momentu gdy będą one opublikowane na oficjalnej stronie IGO:

http://igo-official.ir .

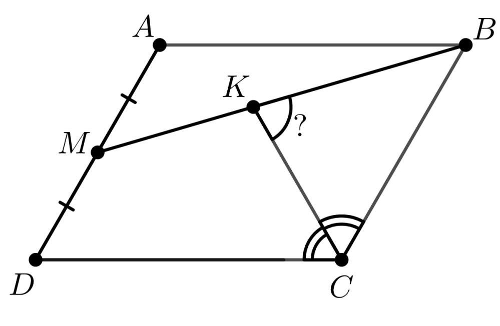
---

1 Jak pokazano poniżej, dana jest kartka papieru o wymiarach 40×30 z zacieniowanym prostokątem o wymiarach 10×5 wewnątrz niej. Naszym zadaniem jest wyciąć zacieniowany prostokąt używając czterech prostych cięć. Każde proste cięcie jest linią prostą, która dzieli kartkę na dwie części, przy czym zachowujemy część z zacienionym prostokątem. Naszym celem jest zminimalizować całkowitą długość prostych cięć. Jak należy to zrobić i jaka jest ta minimalna całkowita długość? Pokaż poprawne cięcia oraz napisz odpowiedź. Nie jest wymagany dowód.



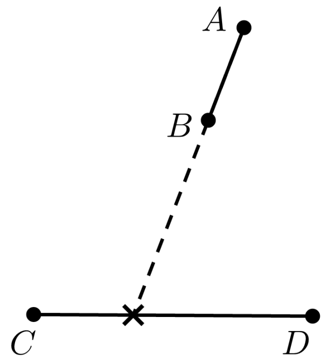
2 Sześciokąt wypukły $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ leży wewnątrz czworokąta wypukłego $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ w taki sposób, że $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, $A_2A_3 \parallel B_2B_3$,..., $A_6A_1 \parallel B_6B_1$. Udowodnić, że pola sześciokątów prostych $A_1B_2A_3B_4A_5B_6$ i $B_1A_2B_3A_4B_5A_6$ są równe. (Sześciokąt prosty to sześciokąt, w którym nie ma samoprzecięć, czyli żadne dwa niesąsiednie boki się nie przecinają).

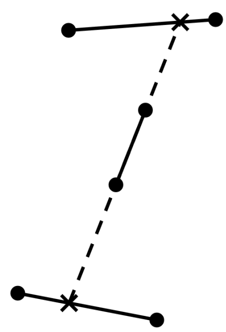
3 Na rysunku obok, $ABCD$ jest równoległobokiem. Wiemy, że $\angle D = 60°$, $AD = 2$ i $AB = \sqrt{3} + 1$. Punkt M jest środkiem AD. Odcinek CK jest dwusieczną kąta przy wierzchołku C. Wyznaczyć miarę kąta CKB.



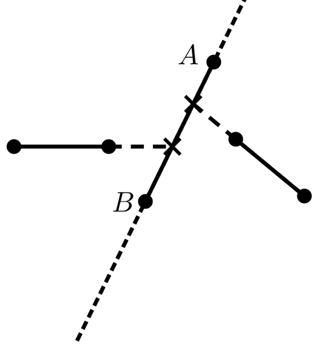
4 Dane są dwa okręgi, o środkach w punktach O_1 i O_2, leżące wewnątrz okręgu ω oraz będące styczne do niego. Cięciwa AB okręgu ω jest styczna do tych dwóch okręgów w taki sposób, że okręgi te leżą po przeciwnych stronach tej cięciwy. Udowodnić, że $\angle O_1AO_2 + \angle O_1BO_2 > 90°$.

5 Na płaszczyźnie dany jest pewien skończony zbiór odcinków, z których żadne dwa się nie przecinają (nawet w końcach tych odcinków). Powiemy, że odcinek AB **łamie** odcinek CD jeśli przedłużenie AB przecina odcinek CD w pewnym punkcie leżącym pomiędzy punktami C i D.





(a) Czy jest możliwe żeby każdy odcinek przedłużony z obu stron łamał dokładnie jeden inny odcinek z każdej ze stron?



(b) Odcinek nazwiemy **otoczonym** jeśli z jego obu stron istnieje dokładnie jeden odcinek, który go łamie. (*np.* odcinek AB na rysunku). Czy jest możliwe żeby wszystkie odcinki były otoczone?

Czas: 4 godziny i 30 minut.
Za każde zadanie można uzyskać maksymalnie 8 punktów.